**Examen de Análisis de Variable Compleja**
**Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)**
**15 de febrero de 2000**

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$, definamos $f(z) = \log(i+z)$ (logaritmo principal).

   a) Justifíquese que $f$ es discontinua en los puntos de la forma $\rho - i$, con $\rho < 0$, y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\rho - i : \rho \leqslant 0\}$

   b) Obténgase la serie de Taylor de $f$ centrada en $z_0 = -1+i$. Sea $\varphi$ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indíquese para qué valores de $z \in \Omega$ se verifica que $f(z) = \varphi(z)$.

2. Construir un isomorfismo conforme del dominio

   $$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

   sobre el dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

3. Dado $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, calcúlese la integral

   $$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz$$

4. Sea $f$ una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 1$ tal que $f(z) = f(\alpha z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   a) Pruébese que, $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y dedúzcase que, necesariamente, $|\alpha| = 1$.

   b) Justifíquese que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$.

   c) Sea $m$ el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$. Justifíquese que hay una función entera $g$ tal que $f(z) = g(z^m)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

5. Sea $f$ una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

   $$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \rho\}$$

   a) Pruébese que la adherencia de $E_\rho$ es igual a $F_\rho$.

   b) Justifíquese que en cada componente conexa acotada de $E_\rho$ hay por lo menos un cero de $f$.